

- sevyndykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous spline-interlinants using trapezoidal elements]. *Tavrichnyi visnyk informatyky ta matematyky* [Tavrichnyi Bulletin of Informatics and Mathematics]. 2011, no. 2, pp. 59–70.
3. Korneychuk N. P. *Splayny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. M: Nauka, 1984, 350 p.
  4. De Vore R. A. Nonlinear approximation. *Acta numerica*. 1998, vol. 7, pp. 51–150. DOI: 10.1017/S0962492900002816.
  5. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Pershyna I. I. *Teoriia rozryvnykh splainiv ta yii zastosuvannya v kompiuternii tomografii* [The theory of discontinuous splines and its application in computed tomography]. Monohrafiia. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2017. 314 p.
  6. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Nablyzheniya rozryvnykh funktsiy rozryvnymy splaynamy metodom minimaksa [Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines by the minimax method]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of the KhNTU]. Kherson, 2018, no. № 3(66), vol. 2, pp. 82–87.
  7. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychni modelyuvannya v kompiuternii tomografii z vykorystanniam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computed tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi "Teoriya ta metody obrobky signaliv"* [Proceedings of the second international conference "Theory and methods of signal processing"]. Kyiv, 2008. pp. 85–86.
  8. Lytvyn O. N., Pershyna Y. I., Sergienko I. V. Estimation of Discontinuous Functions of Two Variables with Unknown Discontinuity Lines (Rectangular Elements). *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014, vol. 50, issue 4, pp. 594–602. DOI: 10.1007/s10559-014-9647-z.
  9. Lytvyn O. M., Pershyna I. I., Sergienko I. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Recovery of discontinuous functions of two variables when discontinuity lines are unknown (rectangular elements)]. *Kybernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.
  10. Pershyna I. I., Shylin V. O., Pasichnyk V. O. Rozv'yazannya 3D zadachi komp'yuternoyi tomografii za vidomymy tomogramamy na systemi dovilynykh ploshchyn [Solution of 3D problem of computed tomography using known tomograms on arbitrary plane system]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial Intelligence] 2015, no. 4, pp. 60–70.

Received (надійшла) 06.05.2019

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Першина Юлія Ігорівна (Першина Юлия Игоревна, Pershyna Iuliia Igorivna)** – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

**Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna)** – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: irina777111@ukr.net.

УДК 629.7.05:531.38

**Ю. А. ПЛАКСИЙ, І. О. ГОМОЗКОВА****АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ АЛГОРИТМА ОРІЄНТАЦІЇ Р. МІЛЛЕРА НА ЧОТИРЬОХЧАСТОТНИЙ ЕТАЛОННИЙ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА**

Запропоновано нове аналітичне представлення компонент кватерніона орієнтації твердого тіла у вигляді алгебраїчної суми добутків тригонометричних функцій кутів, що одночасно змінюються у часі. З оберненого кватерніонного кінематичного рівняння отримані аналітичні вирази для компонент вектора кутової швидкості, що відповідають такому обертальному руху. Для задачі оцінювання точності алгоритмів безплатформеної орієнтації сформовано еталонну модель обертання, яка включає аналітичні вирази для ідеальних сигналів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат. Для декількох наборів частот отримано чисельні реалізації еталонної моделі, побудовані траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Проведено чисельний аналіз похибки дрейфу для алгоритму орієнтації четвертого порядку з використанням у якості проміжних параметрів компонент вектора орієнтації, приріст якого на такті обчислюється алгоритмом Р. Міллера при різних значеннях коефіцієнтів. Показано, що алгоритм Р. Міллера з новим набором коефіцієнтів забезпечує меншу накопичену похибку дрейфу у порівнянні з традиційним алгоритмом і оптимізованим під кінцевий рух.

**Ключові слова:** кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, траєкторії в конфігураційному просторі, алгоритм орієнтації, похибка дрейфу.

**Ю. А. ПЛАКСИЙ, И. А. ГОМОЗКОВА****АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМА ОРИЕНТАЦИИ Р. МИЛЛЕРА НА ЧЕТЫРЕХЧАСТОТНОЙ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Предложено новое аналитическое представление компонент кватерниона ориентации твердого тела в виде алгебраической суммы произведений тригонометрических функций углов, одновременно изменяющихся во времени. Из обращенного кватернионного кинематического уравнения получены аналитические выражения для компонент вектора угловой скорости, которые отвечают такому вращательному движению. Для задачи оценивания точности алгоритмов бесплатформенной ориентации сформирована эталонная модель, которая включает аналитические выражения для идеальных сигналов датчиков угловой скорости в виде квазикоординат. Для нескольких наборов частот получены численные реализации эталонной модели, построены траектории в конфигурационном пространстве параметров ориентации. Проведен численный анализ погрешности дрейфа для алгоритма ориентации четвертого порядка с использованием в качестве промежуточных параметров компонент вектора ориентации, приращение которого на такте вычисляется алгоритмом Р. Миллера при разных значениях коэффициентов. Показано, что алгоритм Р. Миллера с новым набором коэффициентов обеспечивает меньшую накопленную погрешность дрейфа по сравнению с традиционным алгоритмом и оптимизированным под конечное движение.

**Ключевые слова:** кватернион, эталонная модель, тестовое движение, квазикоординаты, траектории в конфигурационном пространстве, алгоритм ориентации, погрешность дрейфа.

© Ю. А. Плаксий, И. О. Гомозкова, 2019

YU. A. PLAKSIY, I. A. HOMOZKOVA

## THE ERROR ANALYSIS OF R. MILLER ORIENTATION ALGORITHM ON A FOUR-FREQUENCY REFERENCE MODEL OF A RIGID BODY ROTATION

A new analytical representation of the rigid body orientation quaternion components in the form of an algebraic sum of products of trigonometric functions of angles that simultaneously change in time is proposed. From the inverted quaternion kinematic equation, analytical expressions for the components of the angular velocity vector are obtained, which correspond to such rotational motion. For the problem of error analysis of SINS orientation algorithms, a reference model has been formed that includes analytical expressions for ideal signals of angular velocity sensors in the form of quasicordinates. For several sets of frequencies, numerical implementations of the reference model were obtained, trajectories in the configuration space of orientation parameters were constructed. A numerical analysis of the drift error for the fourth-order orientation algorithm was performed using the components of the orientation vector as intermediate parameters, the increment of which is calculated by the R. Miller algorithm for various values of coefficients. It is shown that the R. Miller algorithm with a new set of coefficients provides a smaller accumulated drift error compared with the traditional algorithm and one optimized for conical motion.

**Key words:** quaternion, reference model, test motion, quasicordinates, trajectories in configuration space, algorithm of orientation, drift error.

**Вступ.** Розглядається задача оцінювання точності визначення орієнтації в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БІНС), коли кватерніони орієнтації на такті обчислюються спеціальним алгоритмом, на вхід якого подаються ідеальні сигнали з виходів вимірювачів кутової швидкості у вигляді *квазікоординат* [1] на такті  $t \in [t_{n-1}, t_n]$ :

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $\omega_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта  $\vec{\omega}(t)$  на осі зв'язаної системи координат. На теперішній час розроблено велику кількість алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації в умовах первинної інформації (1), оснований на різних підходах [2 – 4]. Один з таких підходів базується на використанні проміжних параметрів, таких, як *вектор орієнтації* (в термінології [1] – *вектор Ейлера*) і відповідних формул розкладень в ряд тригонометричних функцій синуса і косинуса половинного кута Ейлера. Значний внесок в розробку алгоритмів визначення вектора орієнтації різного порядку в Україні належить А. Панову [5, 6]. Ним була розроблена низка алгоритмів, що використовують первинну інформацію (1), яка відноситься до різних тактів зйому. Такі алгоритми автором названі *багатокроковими*. Недоліками таких алгоритмів є необхідність «розгону» алгоритму на перших кроках обчислень, а також значна загрузка автономного обчислювача на такті обчислень [1]. В умовах сучасного розвитку приладного забезпечення навігаційних систем, підвищення швидкодії обчислювачів і застосування їх для високодинамічних об'єктів інтерес представляють алгоритми, що використовують інерціальну інформацію всередині такту обчислень. Такі алгоритми основані на поліноміальній апроксимації кутової швидкості всередині такту [7, 8]. Так, відомий *алгоритм Р. Міллера* [7] використовує квадратичну модель кутової швидкості, в результаті чого приріст вектора орієнтації на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  обчислюється за формулою:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha(\vec{\theta}_n^1 \times \vec{\theta}_n^3) + \beta \vec{\theta}_n^2 \times (\vec{\theta}_n^3 - \vec{\theta}_n^1), \quad (2)$$

де  $\vec{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)$ , а вихідні сигнали гіроскопів

$$\vec{\theta}_n^1 = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt, \quad \vec{\theta}_n^2 = \int_{t_{n-1}+1/3\Delta T}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt, \quad \vec{\theta}_n^3 = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$$

формуються всередині такту обчислень в точках зйому первинної інформації  $t_{n-1}+1/3\Delta T$ ,  $t_{n-1}+2/3\Delta T$ ,  $t_{n-1}+\Delta T$ ,  $\Delta T$  – тривалість такту обчислень. Для традиційного алгоритму коефіцієнти  $\alpha = 33/80$ ,  $\beta = 57/80$ .

Оцінювання методичних похибок алгоритмів орієнтації звичайно пов'язане з використанням для цієї мети спеціальних тестових рухів твердого тіла, для яких орієнтація і компоненти вектора кутової швидкості можуть бути представлені в аналітичному вигляді. В роботі [9] наведена аналітична модель конічного руху, названа «*SPIN-CONE*» моделлю. Оскільки для аналітичних тестових рухів локальна або накопичена похибка алгоритму представляється в аналітичному вигляді, можна використати це для оптимізації алгоритмів орієнтації під конкретний тестовий рух. Оптимізація алгоритмів орієнтації під конічний рух шляхом спеціального «налаштування» коефіцієнтів алгоритму без зміни його структури була запропонована Р. Міллером в 1983 році. Оптимізація основана на отриманні аналітичного виразу для похибки алгоритму у вигляді степеневого ряду з подальшим визначенням невідомих коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$ , виходячи з умови відсікання вищих членів ряду. Інша методика, яка реалізує по суті той же підхід, була представлена М. Ігнагні в 1990 р. [10]. В оптимізованому під конічний рух алгоритмі Р. Міллера значення коефіцієнтів в алгоритмі (2) такі:  $\alpha = 36/80$ ,  $\beta = 54/80$ . Методика оптимізації алгоритмів орієнтації під регулярну прецесію і конічний рух, що основана на мінімізації асимптотичних оцінок похибки обчислювального дрейфу, була реалізована А. Пановим в роботах [11 – 13]. В роботах [14, 15] представлена удосконалена методика оптимізації алгоритмів орієнтації і наведені результати досліджень з оптимізації алгоритмів в умовах узагальненого конічного руху [10], регулярної прецесії і випадкового кутового руху.

Оскільки конічний рух і регулярна прецесія є досить специфічними випадками кутового руху твердого тіла,

для яких існують аналітичні розв'язки відповідної системи динамічних і кінематичних рівнянь, практичний інтерес представляє отримання методичних оцінок точності алгоритмів орієнтації, в тому числі оптимізованих під конкретний рух, на більш складних обертальних рухах. В даній роботі в якості такого узагальненого руху пропонується нова еталонна модель обертання твердого тіла, основана на чотирьохчастотному представленні кватерніона орієнтації.

**Постановка задачі.** Розглядається обертальний рух твердого тіла навколо його центру мас, який описується системою динамічних рівнянь Ейлера:

$$I_1 \dot{\omega}_1(t) - (I_2 - I_1) \omega_2(t) \omega_3(t) = M_1(t), \quad (1, 2, 3), \quad (3)$$

де  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – моменти інерції твердого тіла;  $M_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора головного моменту;  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості  $\vec{\omega}(t)$  на зв'язані осі;  $(1, 2, 3)$  – символ кругової перестановки індексів, і кінематичного кватерніонного рівняння

$$\dot{\Lambda}(t) = 0,5 \Lambda(t) \circ \omega(t), \quad (4)$$

де  $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  – кватерніон орієнтації;  $\omega(t) = (0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$  – кватерніон кутової швидкості;  $\circ$  – символ кватерніонного множення.

Необхідно отримати новий чотирьохчастотний розв'язок системи рівнянь (3), (4) у вигляді аналітичних залежностей  $\omega_i = \omega_i(k_1, k_2, k_3, k_4, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\lambda_j = \lambda_j(k_1, k_2, k_3, k_4, t)$ ,  $j = \overline{0, 3}$  і побудувати основу на цьому розв'язку аналітичну еталонну модель обертання твердого тіла у вигляді сукупності квазікоординат (1):

$$\theta_{ni}^* = \theta_{ni}^*(k_1, k_2, k_3, k_4, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

на такті обчислень  $[t_{n-1}, t_n]$  і модельного кватерніона орієнтації  $\Lambda(t)$ , що відповідає цим кутовим рухам. Далі для чисельної реалізації еталонної моделі на заданому інтервалі часу необхідно оцінити накопичену похибку орієнтації, обчислену алгоритмом визначення кватерніонів орієнтації четвертого порядку з використанням алгоритму Р. Міллера (2) при різних значеннях коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$ .

**Чотирьохчастотне представлення кватерніона орієнтації і еталонна модель обертання твердого тіла.** Методика отримання аналітичних еталонних моделей детально описана в [16]. Вона ґрунтується на прийнятому представленні компонент модельного кватерніона орієнтації  $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  у вигляді алгебраїчних сум добутків тригонометричних функцій (синусів та косинусів) кутів лінійних поворотів  $k_i t$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , і використанні оберненого кінематичного рівняння (4) для нормованого кватерніона  $\Lambda(t)$  у вигляді:

$$\vec{\omega}(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \quad (6)$$

де  $\tilde{\Lambda}(t)$  – спряжений кватерніон.

Представимо аналітичний розв'язок кінематичного рівняння (4) у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \\ \lambda_1(t) &= \cos(k_4 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) - \sin(k_4 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \\ \lambda_2(t) &= \cos(k_4 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_4 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \\ \lambda_3(t) &= \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t). \end{aligned} \quad (7)$$

де  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – задані частоти.

Кінематична модель (7) у випадку  $k_1 = k_4$  і перепозначень  $\varphi/2 = k_1 t$ ,  $\psi/2 = k_2 t$ ,  $\vartheta/2 = k_3 t$  перетворюється на кінематичну модель послідовності поворотів на кути Крилова  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$  [17]. Однак, на відміну від моделі послідовності поворотів, кінематична модель (7) передбачає одночасні повороти твердого тіла на кути  $2k_1 t$ ,  $2k_2 t$ ,  $2k_3 t$ ,  $2k_4 t$ .

Нескладно перевірити, що представлення модельного кватерніона орієнтації (7) забезпечує автоматичне виконання умови  $\|\Lambda(t)\| = 1$ . Тоді, згідно оберненого кінематичного рівняння (6), отримаємо після нескладних перетворень, що проекції вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= (k_1 + k_4) \cdot (\cos(2k_2 t) \cdot \sin(2k_3 t) \cdot \sin((k_1 - k_4)t) - \sin(2k_2 t) \cdot \cos((k_1 - k_4)t)) + \\ &\quad + 2k_2 \cdot \cos(2k_3 t) \cdot \sin((k_1 - k_4)t) + 2k_3 \cdot \cos((k_1 - k_4)t); \\ \omega_2(t) &= (k_1 + k_4) \cdot (\cos(2k_2 t) \cdot \sin(2k_3 t) \cdot \cos((k_1 - k_4)t) + \sin(2k_2 t) \cdot \sin((k_1 - k_4)t)) + \\ &\quad + 2k_2 \cdot \cos(2k_3 t) \cdot \cos((k_1 - k_4)t) - 2k_3 \cdot \sin((k_1 - k_4)t); \\ \omega_3(t) &= (k_1 - k_4) + (1/2) \cdot (k_1 + k_4) \cdot (\cos((2k_2 + 2k_3)t) + \cos((2k_2 - 2k_3)t)) - 2k_2 \cdot \sin(2k_3 t). \end{aligned} \quad (8)$$

Отриманий аналітичний розв'язок рівнянь обертання (3), (4) відповідає початковим умовам  $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\vec{\omega}(0) = (2k_3, 2k_2, 2k_1)$ . Відмітимо, що  $\vec{\omega}(0)$  не залежить від частоти  $k_4$ .

Для отримання умов реалізації обертального руху твердого тіла з компонентами вектора кутової швидкості (8) необхідно розв'язати зворотню задачу динаміки, тобто визначити проекції вектору моменту, який призводить до такого обертального руху твердого тіла з моментами інерції  $I_1, I_2, I_3$ , треба знайти похідні від проекцій кутової швидкості і разом з виразами (8) підставити в ліву частину динамічних рівнянь (3).

**Еталонна модель обертання, що основана на чотирьохчастотному розв'язку.** В основу еталонної моделі обертання полягають аналітичні залежності для кватерніона орієнтації (7) і квазікоординат (1) в умовах, коли значення частот  $k_1, k_2, k_3, k_4$  задані. Останні можуть задаватися як з міркувань існуючих обмежень на кутову швидкість обертання об'єкта як твердого тіла, так і бути результатом апроксимацій реального руху конкретного об'єкта.

Щоб отримати аналітичні вирази для квазікоординат, спочатку знайдемо компоненти *вектора позірною повороту*

$$\bar{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)) = \int_0^t \bar{\omega}(t) dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Враховуючи отримані вирази для компонент вектора кутової швидкості, в результаті після нескладних перетворень маємо:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= (1/4) \cdot (k_1 + k_4) \cdot (\sin((2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4)t) / (2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4) - \\ &\quad - \sin((2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4)t) / (2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4) + \sin((2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4)t) / (2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4) - \\ &\quad - \sin((2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4)t) / (2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4) + 2(\cos((2k_2 + k_1 - k_4)t) - 1) / (2k_2 + k_1 - k_4) + \\ &\quad + 2(\cos((2k_2 - k_1 + k_4)t) - 1) / (2k_2 - k_1 + k_4) + k_2(-(\cos((k_1 - k_4 + 2k_3)t) - 1) / (k_1 - k_4 + 2k_3) - \\ &\quad - (\cos((k_1 - k_4 - 2k_3)t) - 1) / (k_1 - k_4 - 2k_3)) + 2k_3 \cdot \sin((k_1 - k_4)t) / (k_1 - k_4); \\ \theta_2(t) &= (1/4) \cdot (k_1 + k_4) \cdot (-(\cos((2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4)t) - 1) / (2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4) - \\ &\quad - (\cos((2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4)t) - 1) / (2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4) - (\cos((2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4)t) - 1) / (2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4) - \\ &\quad - (\cos((2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4)t) - 1) / (2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4) + 2\sin((2k_2 - k_1 + k_4)t) / (2k_2 - k_1 + k_4) - \\ &\quad - 2\sin((2k_2 + k_1 - k_4)t) / (2k_2 + k_1 - k_4) + k_2(\sin((k_1 - k_4 + 2k_3)t) / (k_1 - k_4 + 2k_3) + \\ &\quad + \sin((k_1 - k_4 - 2k_3)t) / (k_1 - k_4 - 2k_3)) + 2k_3 \cdot (\cos((k_1 - k_4)t) - 1) / (k_1 - k_4); \\ \theta_3(t) &= (k_1 - k_4)t + (1/4) \cdot (k_1 + k_4) \cdot (\sin((2k_2 + 2k_3)t) / (2k_2 + 2k_3) + \sin((2k_2 - 2k_3)t) / (2k_2 - 2k_3)) + \\ &\quad + 2k_2(\cos(2k_3t) - 1) / (2k_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Значення квазікоординат (1) тепер можна отримати в аналітичному вигляді або чисельно з формули:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

**Чисельна реалізація чотирьохчастотної еталонної моделі обертання.** Реалізуємо запропоновану чотирьохчастотну модель для деяких значень частот, такту обчислень  $\Delta t = 0,1$  с на інтервалі часу 200 с.

На рис. 1 представлені залежності квазікоординат  $\theta_{ni}^*$  від часу для значень частот моделі  $k_1 = 0,150$ ,  $k_2 = 0,151$ ,  $k_3 = 0,075$ ,  $k_4 = 0,152$ . Отримані траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації наведені на рис. 2.

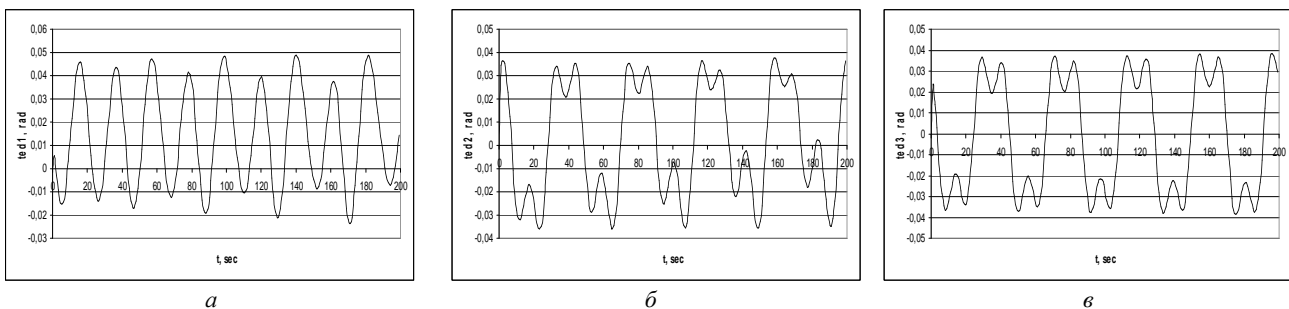
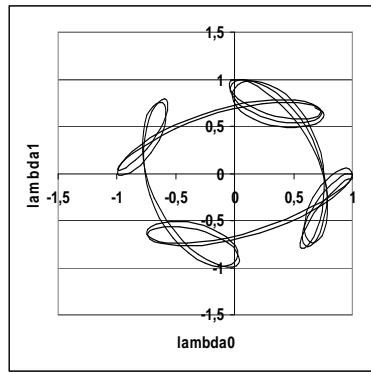
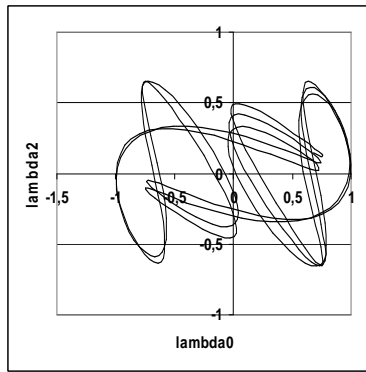


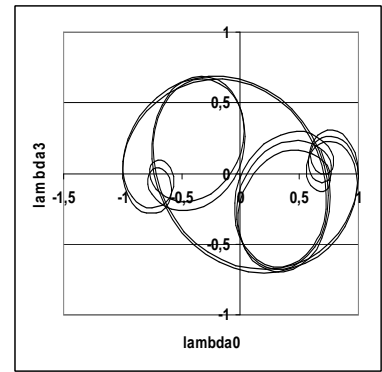
Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для чотирьохчастотної еталонної моделі при  $k_1 = 0,150$ ,  $k_2 = 0,151$ ,  $k_3 = 0,075$ ,  $k_4 = 0,152$ : а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.



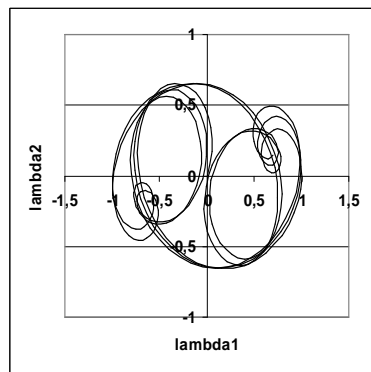
a



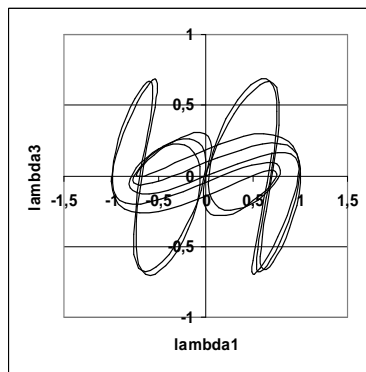
б



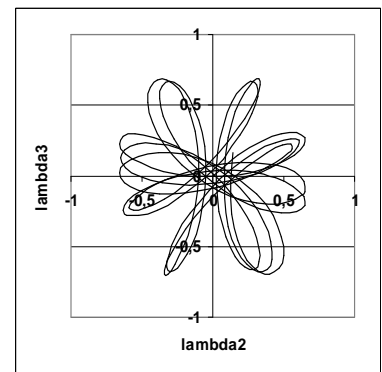
в



г

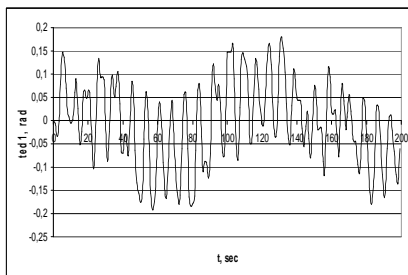


д

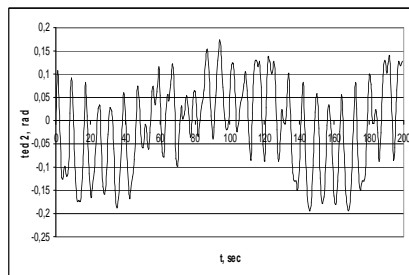


е

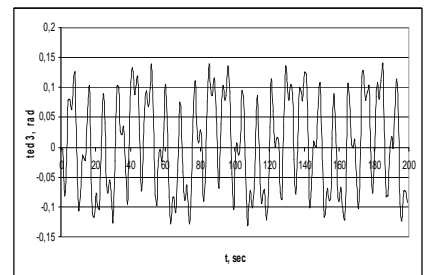
Рис. 2 – Траскторії в конфігураційному просторі для чотирьохчастотної еталонної моделі при  $k_1 = 0,150$ ,  $k_2 = 0,151$ ,  $k_3 = 0,075$ ,  $k_4 = 0,152$ : а –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; г –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е –  $\lambda_3(\lambda_2)$ .



а

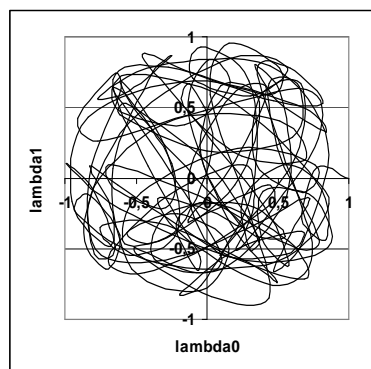


б

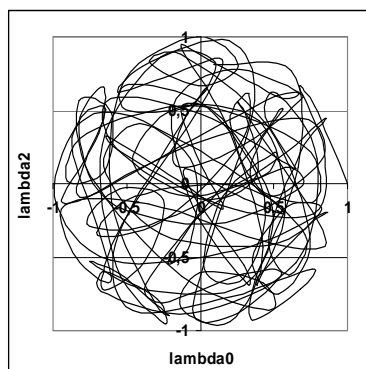


в

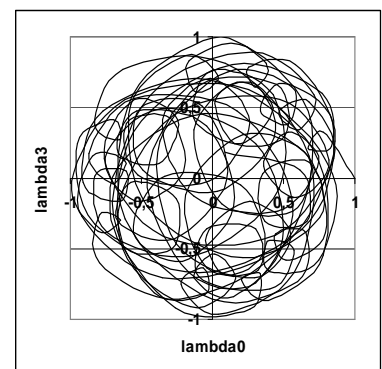
Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для чотирьохчастотної еталонної моделі при  $k_1 = 0,550$ ,  $k_2 = 0,425$ ,  $k_3 = 0,355$ ,  $k_4 = 0,500$ : а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.



а



б



в

Рис. 4 – Траскторії в конфігураційному просторі для чотирьохчастотної еталонної моделі при  $k_1 = 0,550$ ,  $k_2 = 0,425$ ,  $k_3 = 0,355$ ,  $k_4 = 0,500$ : а –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в –  $\lambda_3(\lambda_0)$ .

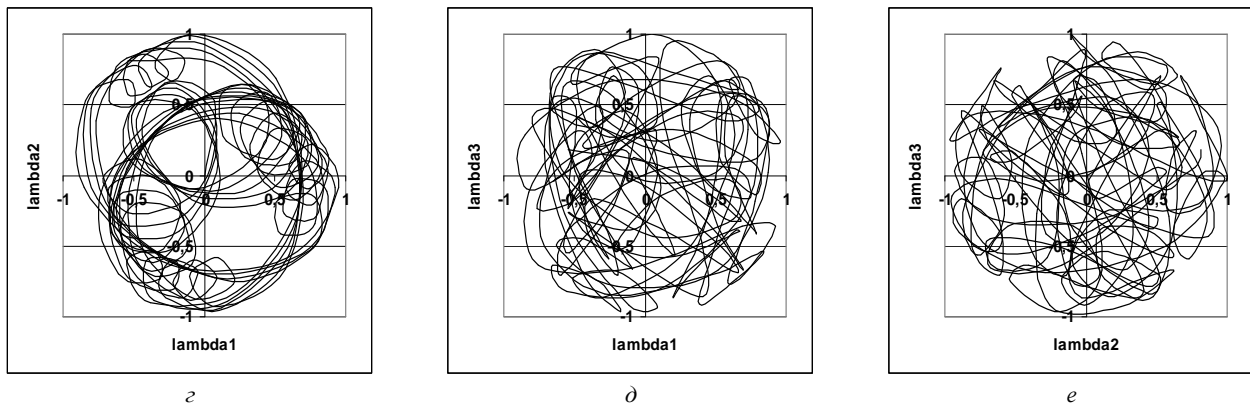


Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для чотирьохчастотної еталонної моделі при  $k_1 = 0,550$ ,  $k_2 = 0,425$ ,  $k_3 = 0,355$ ,  $k_4 = 0,500$ : а –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; б –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; в –  $\lambda_3(\lambda_2)$ .

Для значень частот  $k_1 = 0,550$ ,  $k_2 = 0,425$ ,  $k_3 = 0,355$ ,  $k_4 = 0,500$  результати реалізації чотирьохчастотної еталонної моделі у вигляді залежностей квазікоординат  $\theta_{ni}^*$  від часу та траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації представлені на рис. 3 та рис. 4.

**Точносний аналіз алгоритму орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній еталонній моделі.** Застосуємо запропоновану чотирьохчастотну еталонну модель для оцінювання точності алгоритму визначення кватерніона орієнтації четвертого порядку, в якому приріст вектора орієнтації на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  обчислюється за формулою Р. Міллера (2) для різних значень коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$ . Для оцінювання точності алгоритму визначення кватерніона орієнтації в якості похибки будемо визначати неусувну похибку орієнтації – накопичений дрейф обчисленого трієдру осей відносно його істинного положення, яке задається еталонною моделлю. Для цього використаємо методику визначення дрейфу, запропоновану в [2].

На рис. 5, а представлена залежність похибки дрейфу від часу на інтервалі часу  $t \in [0, 2000]$  с, отримана з кроком  $\Delta t = 0,1$  с на чотирьохчастотній еталонній моделі при  $k_1 = 0,550$ ,  $k_2 = 0,425$ ,  $k_3 = 0,355$ ,  $k_4 = 0,500$  для традиційного алгоритму орієнтації (2) при  $\alpha = 33/80$ ,  $\beta = 57/80$ . Для порівняння на рис. 5, б наведена залежність похибки дрейфу від часу, що отримана у випадку оптимізованого алгоритму Р. Міллера при  $\alpha = 36/80$ ,  $\beta = 54/80$ . Отримано, що оптимізований алгоритм призводить до меншої похибки дрейфу.

Розглянемо інший варіант коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$  в формулі Р. Міллера. Оскільки має місце умова  $\alpha + \beta = 9/8$ , сформуємо новий алгоритм, де покладемо  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1,125$ , тобто перепишемо формулу (2) у вигляді:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + (9/8) \cdot \vec{\theta}_n^2 \times (\vec{\theta}_n^3 - \vec{\theta}_n^1), \quad (12)$$

Оцінимо похибку накопиченого дрейфу алгоритму визначення кватерніонів, коли приріст вектора орієнтації на такті обчислюється за формулою (12). Залежність похибки дрейфу від часу у цьому випадку представлена на рис. 5, в. Отримали, що у випадку значень коефіцієнтів  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 9/8$  в (2) похибка дрейфу менша за похибку як традиційного алгоритму Р. Міллера, так і оптимізованого алгоритму.

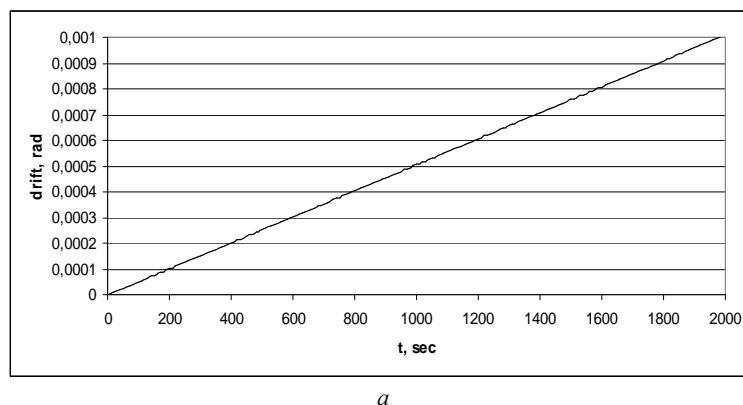


Рис. 5 – Залежність похибки дрейфу від часу для алгоритму 4-го порядку, отримані у випадку: а – традиційного алгоритму Р. Міллера.

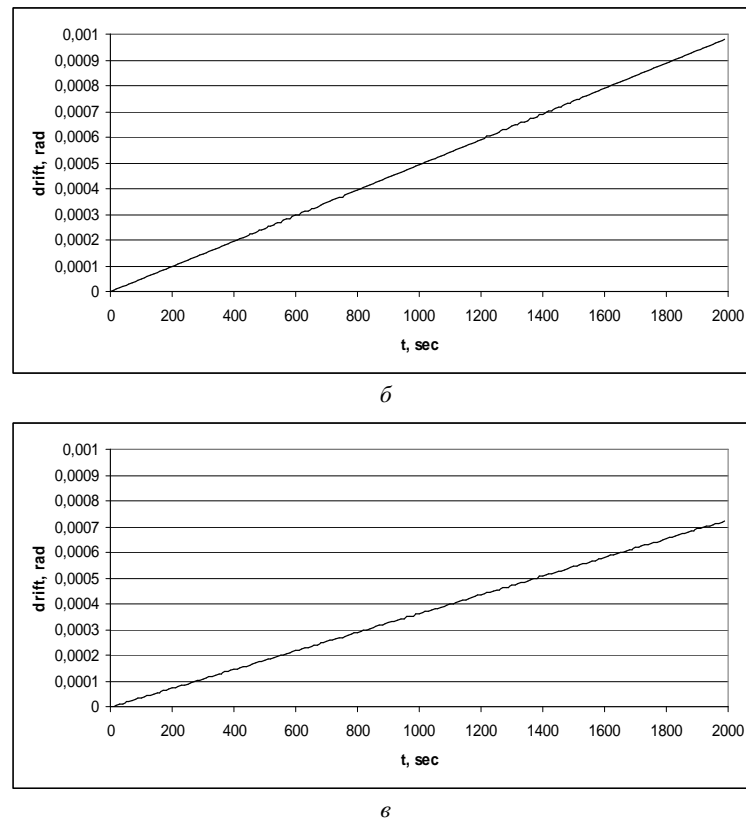


Рис. 5 – Залежність похибки дрейфу від часу для алгоритму 4-го порядку, отримані у випадку:  
б – оптимізованого алгоритму Р. Міллера; в – алгоритму (12).

Таблиця 1 – Значення накопичених похибок дрейфу, обчислені для алгоритму Р. Міллера

Алгоритм Р. Міллера (12)	Дрейф, рад
Традиційний, при $\alpha = 33/80$ , $\beta = 57/80$	$1,006 \cdot 10^{-3}$
Оптимізований під конічний рух, при $\alpha = 36/80$ , $\beta = 54/80$	$0,982 \cdot 10^{-3}$
Алгоритм (12) при $\alpha = 0$ , $\beta = 9/8$	$0,722 \cdot 10^{-3}$

Для порівняння в табл. 1 наведені кінцеві значення накопичених похибок дрейфу, обчислені для класичного алгоритму Р. Міллера ( $\alpha = 33/80$ ,  $\beta = 57/80$ ), оптимізованого під конічний рух алгоритму ( $\alpha = 36/80$ ,  $\beta = 54/80$ ) та алгоритму (12) при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 9/8$ .

**Висновки.** Запропоновано нову аналітичну модель обертання твердого тіла, яка оснований на чотирьохчастотному представленні кватерніона орієнтації тригонометричними функціями лінійних кутів. На відміну від відомих випадків інтегрованості в квадратурах системи рівнянь обертання твердого тіла (регулярної прецесії, конічного руху) таку модель можна вважати більш узагальненим випадком обертального руху. Запропоновану модель покладено в основу еталонної моделі обертання твердого тіла, для чого вона була доповнена аналітичними виразами для квазікоординат. Реалізація еталонної чотирьохчастотної моделі була використана в якості тестового руху для оцінювання похибки дрейфу алгоритму визначення кватерніонів орієнтації четвертого порядку з використанням в якості проміжних параметрів вектора орієнтації, приріст якого на такті обчислюється за алгоритмом Р. Міллера. Показано, що для алгоритму Р. Міллера із значеннями коефіцієнтів  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 9/8$  накопичена похибка дрейфу менша, ніж це має місце для традиційного алгоритму і оптимізованого під конічний рух алгоритму.

#### Список літератури

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1 : Attitude algorithms // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1998. – Vol. 21. – No. 1. – P. 19 – 28.
4. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной навигации. – К. : Наук. думка, 1995. – 280 с.
5. Панов А. П. Двухшаговые алгоритмы вычисления параметров ориентации // Космич. исслед. на Украине. – К. : Наук. думка, 1974. – Вып. 5. – С. 76 – 82.

6. Панов А. П. Асимптотические оценки погрешностей методов вычисления параметров ориентации твердого тела // Кибернетика и вычисл. техника. – 1980. – Вып. 47. – С. 59 – 71.
7. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1983. – Vol. 6. – No. 4. – P. 287 – 291.
8. Плаксий Ю. А. Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – №58 (1031). – С. 168 – 177.
9. Savage P. G. Strapdown System Performance Analysis. // Advances In Navigation Sensors and Integration Technology, NATO RTO Lecture Series. – 2004. – RTO-EN-SET-064. – P. 3-1 – 3-28.
10. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1990. – Vol. 13. – No. 2. – P. 363 – 369.
11. Панов А. П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Мех. гироск. систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 105 – 112.
12. Панов А. П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9.
13. Панов А. П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычислений кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988. – Вып. 77. – С. 47 – 52.
14. Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. Optimization of strapdown attitude algorithms // Proceedings of the 2d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 24 – 25, 1995. – P. 110 – 121.
15. Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. New procedure for strapdown attitude algorithms optimization as applied to stochastic motion input // Proceedings of the 3d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 28 – 29, 1996. – P. 3 – 12.
16. Плаксий Ю. А. Еталонна тригонометрична кватерніонна модель обертання твердого тіла прецесійного типу // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2013. – № 37(1010). – С. 141 – 147.
17. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М. : Наука, 1976. – 672 с.

## References (transliterated)

1. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. Vvedenie v teoriyu besplatformennykh inertial'nykh navigatsionnykh sistem [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p.
2. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela [Application of quaternions in problems of rigid body orientation]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 320 p.
3. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1 : Attitude algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1998, vol. 21, no. 1, pp.19–28.
4. Panov A. P. Matematicheskie osnovy teorii inertial'noy navigatsii [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1995. 280 p.
5. Panov A. P. Dvushagovye algoritmy vychisleniy parametrov orientatsii [Two-step algorithms for calculating orientation parameters]. *Kosmich. issled. na Ukraine* [Space research in Ukraine]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974, no. 5, pp. 76–82.
6. Panov A. P. Asimptoticheskie otsenki pogreshnostey metodov vychisleniya parametrov orientatsii tverdogo tela [Asymptotic error estimates for methods for calculating the orientation parameters of a rigid body]. *Kibernetika i vychisl. Tekhnika* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1980, vol. 47, pp. 59–71.
7. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1983, vol. 6, no. 4, pp. 287–291.
8. Plaksey Yu. A. Stepenivye algoritmy vyznachennya kvaternioniv orientatsiyi ta yikh interpolatsiyini modifikatsiyi [Degree algorithms for determining quaternions of orientation and their interpolation modifications]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no. 58 (1031), pp. 168–177.
9. Savage P. G. Strapdown System Performance Analysis. // *Advances In Navigation Sensors and Integration Technology, NATO RTO Lecture Series*. 2004. RTO-EN-SET-064, pp. 3-1 – 3-28.
10. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1990, vol. 13, no. 2, pp. 363–369.
11. Panov A. P. Optimizatsiya metodov vychisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyakh tverdogo tela [Optimization of methods for calculating quaternions for conic vibrations of a rigid body]. *Mekh. girosk. sistem.* [Mechanics of Gyroscopic Systems]. Kyiv, 1984, vol. 3, pp. 105–112.
12. Panov A. P. Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchae pretsessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of a precession of a rigid body]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1987, vol. 73, pp. 3–9.
13. Panov A. P. Adaptivnye pretsessionnye algoritmy vychisleniy kvaternionov vrasheniya tverdogo tela [Adaptive precession algorithms for computing quaternions of rotation of a rigid body]. *Kibernet. i vychisl. tekhn.* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1988, vol. 77, pp. 47–52.
14. Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. Optimization of strapdown attitude algorithms. *Proceedings of the 2d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 24–25, 1995*. pp. 110–121.
15. Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. New procedure for strapdown attitude algorithms optimization as applied to stochastic motion input. *Proceedings of the 3d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 28–29, 1996*. pp. 3–12.
16. Plaksey Yu. A. Etalonna trygonometrychna kvaternionna model' obertannya tverdogo tila pretsesiynogo typu [Precession-type solid rotation reference trigonometric quaternion model]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no. 37 (1010), pp. 141–147.
17. Ishlinskiy A. Yu. *Orientatsiya, giroskopy i inertial'naya navigatsiya* [Orientation, gyros and inertial navigation]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 672 p.

Надійшла (received) 10.07.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Плаксий Юрій Андрійович (Плаксий Юрий Андреевич, Plaksey Yuriy Andriyovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksey.yu@gmail.com.

**Гомозкова Ірина Олександрівна (Гомозкова Ирина Александровна, Homozkova Iryna Oleksandrivna)** – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: arinhomozkova@gmail.com.